UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 — Année universitaire : 2016-2017
Module : Analyse IV — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$: 1

Exercice 1.

1. Montrer les applications $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ et $\mathbf{N}_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^p$ par :

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_1(x) &= \sum_{k=1}^{p} |x_k|,\\ \mathbf{N}_2(x) &= \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |x_k|^2} \quad \text{(norme euclidienne)},\\ \mathbf{N}_\infty(x) &= \sup_{k=1,\dots,p} |x_k| \quad \text{(norme sup)}.\end{aligned}$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^p$.

2. Montrer que les trois normes $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ et $\mathbf{N}_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \quad \mathbf{N}_\infty(x) \leq \mathbf{N}_1(x) \leq \sqrt{p}\mathbf{N}_2(x) \leq p\mathbf{N}_\infty(x).$$

Exercice 2. : Les fonctions suivantes sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?

$$d_1(x,y) = (x-y)^2;\ d_2(x,y) = \sqrt{|y-x|};\ d_3(x,y) = \left|y^3 - x^3\right|;$$
$$d_4(x,y) = \left|y^2 - x^2\right|;\ d_5(x,y) = |y-2x|.$$

Exercice 3. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. On définit d_1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$d_1(x,y) = |f(y) - f(x)|,$$

1. Montrer que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Soit d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ définie par : $d(x,y) = |y-x|$ et d_1 l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $d_1(x,y) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$.

   2.1- Montrer que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}$.

   2.2- $\mathbb{R}$ est-il borné pour la distance d_1?

   2.3- Décrire et représenter la boule ouverte $B(0,1)$ relativement à d_1.

   2.4- Les distances d et d_1 sont-elles équivalentes ?

Exercice 4. : Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \mathbf{N}(x,y)=\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}.$$

On rappelle que la norme $\mathbf{N}_2$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\mathbf{N}_2(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

1) Prouver que $\mathbf{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Que peut-on dire des normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$?

2) Déterminer et dessiner la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour les deux normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$.

3) Déterminer p et q tel que

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ p\,\mathbf{N}_2(x,y)\leq\mathbf{N}(x,y)\leq q\,\mathbf{N}_2(x,y).$$

Exercice 5. : Montrer que

1) Toute intersection d'ensembles fermés de E est fermée dans E.

2) Toute réunion finie d'ensembles fermés de E est fermée dans E.

Exercice 6. : Soit $a\in E$.

1. Montrer que la sphère $S\,(a,r)$, de centre a et de rayon r, de E est un ensemble fermé dans E.
2. Montrer que $\{a\}$ est fermé dans E.
3. Montrer que tout sous-ensemble fini de E est fermé dans E.

Exercice 7. $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2-y^2\geq 1 \text{ et } x^2+y^2<2\}$

1. montrer que la suite $\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{n},0\right)\in C$,
2. en déduire que C n'est pas fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. : Les ensembles suivants sont-ils compacts ? Justifier votre réponse.

a) $\mathbb{Z}$
b) $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\ldots\times\left[a_p,b_p\right]$.
c) Une union finie de réels.
d) Une union infinie de réels distincts.
e) La boule fermée de centre a et de rayon $r>0$ dans $\mathbb{R}^p$.

Exercice 9. : Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$ de limite $a\in\mathbb{R}^p$. Le sous-ensemble $A=\{a_n;n\in\mathbb{N}\}\cup\{a\}$ est-il compact dans $\mathbb{R}^p$?